

POLUBIĆ I ZROZUMIEĆ PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI



Wzorcowy materiał szkoleniowy w zakresie innowacyjnych rozwiązań organizacyjno-dydaktycznych dla nauczycieli i studentów studiów pedagogicznych

Matematyka w szkołach ponadpodstawowych

Anna Makarewicz, Anna Tatarczak

Autorki:

Anna Makarewicz, Anna Tatarczak

Recenzentka:

Ewa Ludwikowska

Wydawca:

Euro Innowacje sp. z o.o.

Publikacja została opracowana w ramach projektu pt. „Utworzenie Szkoły Ćwiczeń w powiecie pilskim” realizowanego w partnerstwie przez Powiat Pilski (Beneficjent projektu) oraz Euro Innowacje sp. z o.o. (Partner projektu).

Projekt jest finansowany ze środków budżetu państwa oraz Unii Europejskiej, w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój (PO WER), II Osi Priorytetowej *„Efektywne polityki publiczne dla rynku pracy, gospodarki i edukacji”*, Działania 2.10 *„Wysokiej jakości system oświaty”*.

Publikacja jest udostępniona na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Uznanie autorstwa 3.0 Polska (CC BY 3.0 PL).



Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój



**Rzeczpospolita
Polska**

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



SPIS TREŚCI

WSTĘP	4
CEL PUBLIKACJI	8
1. Komunikacja między nauczycielem a uczniem	9
2. Pogadanka.....	12
3. Pozytywne relacje w zespole klasowym	14
4. Innowacyjne pomoce dydaktyczne.....	18
5. Uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.....	24
6. Wektory	27
7. Przesunięcia wykresów funkcji i ich symetria względem osi OX i OY	28
8. Różne wykresy funkcji i ich zastosowania.....	33
PODSUMOWANIE	35
BIBLIOGRAFIA	36
NETOGRAFIA.....	39

 $f(x)$ 

WSTĘP

W publikacji zostanie opisana nowoczesna metoda nauki pojęcia funkcji i przekształcania wykresów funkcji z wykorzystaniem matematyki multimedialnej a także z wykorzystaniem programów komputerowych. Innowacyjne zastosowanie nowoczesnych technik pozwoli sprawdzić uczniom przeprowadzone obliczenia, pobudzi wyobraźnię i sprawi, że pojęcie funkcji będzie prostsze. Omówione zostaną również interesujące przykłady i różne modele rozwiązań. Ponadto publikacja będzie zawierała cenne wskazówki dotyczące zapamiętywania i rozwiązywania zadań z wykorzystaniem funkcji a wszystko to w przyjazny sposób będzie stymulowało do dalszego pogłębiania wiedzy. Ta publikacja to pogładowe i intuicyjne podejście do tematu funkcji również dla uczniów z różnymi trudnościami.

Nauczanie przez rozwijanie myślenia abstrakcyjnego może być wykorzystane na każdym etapie nauczania przygotowywanych zajęć nie tylko przez nauczyciela ale jest także zachętą do samodzielnego innowatorskiego ćwiczenia matematyki.

W publikacji tej zgodnie z celami kształcenia ogólnego w liceum ogólnokształcącym zawartymi w podstawie programowej zwrócimy uwagę m.in. na:

- traktowanie uporządkowanej, systematycznej wiedzy jako podstawy kształtowania umiejętności,
- doskonalenie umiejętności myślowo-językowych, takich jak: czytanie ze zrozumieniem, formułowanie pytań i problemów, posługiwanie się kryteriami, uzasadnianie, wyjaśnianie, wnioskowanie, definiowanie, posługiwanie się przykładami itp.,
- rozwijanie osobistych zainteresowań ucznia i integrowanie wiedzy przedmiotowej z różnych dyscyplin,
- łączenie zdolności krytycznego i logicznego myślenia z umiejętnościami wyobrażeniowo-twórczymi,

 $f(x)$ 

- rozwijanie wrażliwości społecznej, moralnej i estetycznej,
- rozwijanie u uczniów szacunku dla wiedzy, wyrabianie pasji poznawania świata i zachęcanie do praktycznego zastosowania zdobytych wiadomości [Podstawa programowa].

Kompetencje, które chcemy doskonalić, to m.in.:

- a) kreatywne rozwiązywanie problemów,
- b) rozumowanie w sposób matematyczny, chęć do szukania argumentów,
- c) aktywne uczestnictwo we wspólnocie klasowej,
- d) sprawne posługiwanie się nowoczesnymi technologiami,
- e) systematyczne uczenie się,
- f) rozwijanie kompetencji językowej i kompetencji komunikacyjnej stanowiących kluczowe narzędzie poznawcze we wszystkich dyscyplinach wiedzy,
- g) umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł oraz dokumentowania swojej pracy, z uwzględnieniem prawidłowej kompozycji tekstu i zasad jego organizacji,
- h) udział w projektach zespołowych lub indywidualnych oraz organizacja i zarządzanie projektami,
- i) praca w grupie [Podstawa programowa].

Aby uczniowie w maksymalnym stopniu skorzystali z lekcji, to powinna być ona dobrze przygotowana. Czas jakim dysponujemy na lekcji również trzeba starannie przyporządkować do konkretnych czynności. Po wejściu do sali poczekajmy chwilę, aż uczniowie wypakują książki i zeszyty, nie przekrzykujemy ich w tym momencie ponieważ jest to krótki czas na przygotowanie się do lekcji. Następnie należy sprawdzić obecność, uczniowie szybko rozpoznają nauczyciela, na lekcje którego można się spóźniać. Uważajmy aby w czasie lekcji nie wypuszczać uczniów z klasy zbyt często pod pretekstem wyjścia do WC lub z innych powodów.

 $f(x)$ 

Jeśli chcemy skupić uwagę uczniów, rozbudzić ciekawość omawianym zagadnieniem, formułujemy w sposób interesujący temat lekcji oraz główne problemy, które będą przedmiotem naszych rozważań. Opowiedzmy o czym będzie lekcja. To pomoże uczniowi w usystematyzowaniu wiedzy, którą zdobędzie na tej lekcji, będzie znał plan działania na najbliższe 45 minut. Jeśli do wprowadzenia tematu lekcyjnego potrzebne są znane uczniom wiadomości, przystępując do zadawania pytań całej klasie (możemy też zrobić zadanie przypominające zdobytą już wiedzę), na które po dwuminutowej przerwie, przeznaczonej na przemyślenie odpowiedzi przez wszystkich uczniów, odpowiada zgłaszający się lub wskazany przez nauczyciela uczeń.

Pracę z uczniem zdolnym proponujemy wspomagać poprzez samodzielne prowadzenie fragmentu lub całej lekcji oczywiście zgodnie ze wskazówkami nauczyciela, uczeń zdolny może też przewodzić w pracy grupowej podczas lekcji, możemy też przynosić takiemu uczniowi indywidualne zestawy zadań – problemów i realizować indywidualny program kształcenia, możemy też powierzyć takiemu uczniowi pełnienie funkcji asystenckich podczas lekcji itp. Uczniów słabszych możemy wspomagać poprzez zróżnicowaną pracę grupową i wykorzystywanie uczniów dobrych – asystentów, organizację centrum, któremu przewodzi nauczyciel.

Budowanie pozytywnych relacji w zespole klasowym może następować poprzez czynności, które sprzyjają integrowaniu zespołu klasowego nie tylko na początku roku szkolnego. Z aktywności długofalowych prowadzonych na każdym etapie edukacyjnym możemy wymienić:

- a) organizowanie wycieczek i imprez, np. piknik, ognisko, dyskoteka,
- b) wprowadzenie w życie klasy świętowanie takich wydarzeń jak np. obchodzenie urodzin, dnia chłopaka, kobiet, walentynek itp.,
- c) prowadzenie kroniki klasowej – nie musi być ona w tradycyjnej wersji papierowej. W dobie komputerów sprawdza się wersja elektroniczna, w której również możemy dodawać zdjęcia, filmiki czy opisy sytuacji.



$f(x)$



Ponadto wszystkie zapiski mogą być komentowane przez uczniów klasy. Najlepiej, jeśli redagowaniem dowolnej formy „kroniki” uczniowie będą się zajmowali na zmianę, tak, żeby do końca roku nie było osoby, która nie dołożyłaby do niej własnego wkładu,

- d) dopingowanie ucznia/drużyny klasowej w rozgrywkach, turniejach, konkursach itp.,
- e) organizowanie aktywności, które angażują cały zespół klasowy i mają charakter np. filantropijny czy wolontariacki (koncert charytatywny, rozgrywanie meczu charytatywnego wspólnie z nauczycielami, zbiórka darów, makulatury itp.).

 $f(x)$ 

CEL PUBLIKACJI

Publikacja ma na celu wsparcie nauczycieli realizujących nauczanie w szkole, rozwijanie kompetencji kluczowych na lekcjach, zajęciach oraz w ramach działań edukacyjnych, a w szczególności wykształcenie sprawności w różnego rodzaju zadaniach dotyczących funkcji oraz przekształcania wykresów funkcji. Przybliżymy temat funkcji, w tym podamy proste przykłady w kontekście praktycznym.

Publikacja będzie zawierała wybrane wzory matematyczne wraz z ich praktycznym i teoretycznym zastosowaniem. Nowatorskie sposoby ukazujące zastosowanie funkcji w praktyce bardzo wzbogacają publikację. W publikacji zostanie opisane jak prowadzić lekcje by bardziej pobudzić wyobraźnię. Innowacyjne i uniwersalne oblicze matematyki to wykorzystywanie różnych programów komputerowych do rozwiązywania zadań z funkcjami. Zadania – przygotowane przez autorki będą przeznaczone do rozwiązania w grupach, parach lub indywidualnie jak również mogą posłużyć do ewaluacji. Ponadto pewna powtarzalność w tej publikacji jest czynnikiem wspierającym uczenie się uczniów z trudnościami. Publikacja ta to innowacyjny akcent na rozwijanie myślenia matematycznego, odpowiada uczniom ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Wszystkie elementy publikacji, począwszy od struktury przez typ zadań, ich nowoczesny charakter, a także podejście metodyczne, zostały dobrane tak, by uwzględniały trudności uczniów i pomagały w ich przezwyciężeniu i bardziej stymulowały do samokształcenia.



$f(x)$



1. Komunikacja między nauczycielem a uczniem

W podejściach odwołujących się do prac Wygotskiego pierwotną funkcją języka nie jest wyrażanie myśli, lecz społeczne porozumiewanie się. Moje wypowiedzi, jeśli nie są czymś w rodzaju spowiedzi, mają na celu wywołanie u innych pewnych myśli, które niekoniecznie są myślami zakodowanymi w tym, co mówię, lecz pociągającymi za sobą działania lub myśli, na których mi zależy. Język jest nośnikiem znaczeń, te zaś są atrybutem nie moich myśli, lecz użycia języka w danym kontekście sytuacyjnym i kulturowym, w ten sposób wiedza, która jest systemem znaczeń, także nie jest atrybutem podmiotu, lecz istnieje obiektywnie w sensie zrelatywizowanym do kultury i istnieje ona jako proces, historycznie. Istnienie cywilizacji świadczy o tym, iż przekazywanie wiedzy (znaczeń), w sposób upośredniczony symbolicznie, jest możliwe [Sierpińska, 1996, s. 13]. Nie znaczy to jednak, iż Wygotski wierzył w możliwość „bezpośredniego przekazywania” wiedzy poprzez opisy słowne lub definicje, rozwój umysłu opiera się na rozwoju funkcji umysłowych (np. pamięci dowolnej, pamięci logicznej, abstrahowania, uogólniania, porównywania, rozróżniania), a tych nie można nauczyć się w postaci gotowej formuły, przekazywanie znaczeń słów za pomocą słownych wyjaśnień może być zawodne, ponieważ każde słowo jest uogólnieniem i różni ludzie mogą używać różnych stopni uogólnienia jako funkcji myślowej [Wygotski, 1989, s. 169-173]. Dyskutując na temat poglądów Tołstoja, Wygotski zgadzał się z nim całkowicie gdy ten stanowczo sprzeciwiał się scholastycznemu sposobowi nauczania „metodą suchego objaśniania i wkuwania na pamięć”, ale polemizował z nim, gdy ów proponował zaniechanie wszelkiej dydaktycznej ingerencji w „skomplikowany, tajemniczy i delikatny” proces tworzenia nowych pojęć [Sierpińska, 1996, s. 13].

Według Wygotskiego, tylko pojęcia spontaniczne, codzienne rozwijają się drogą uogólnienia od konkretnego do abstrakcji, pojęcia te mają bogate powiązania z bezpośrednimi przeżyciami, ale są nie powiązane w systemy i wysoce zależne od kontekstu [ibidem, s. 17]. Z tego powodu nie są one prawdziwymi pojęciami

 $f(x)$ 

(w rozumieniu Wygotskiego), lecz raczej pseudopojęciami lub kompleksami [Wygotski, 1989, s.126]. Natomiast pojęcia naukowe, poznawane w szkole, nie są naturalnym produktem rozwoju poznawczego, tak jak u Piageta [ibidem]. Jako produkt kultury, przekazywane są one uczniowi w postaci ogólnej; aby je poznać i przyswoić uczeń musi dokonać ich konkretyzacji, poprzez budowanie i badanie przykładów, nieprzykładów i zastosowań pojęcia w różnych kontekstach [Kozulin, 1990, s. 169]. Według tego podejścia omawiamy przekształcanie wykresów funkcji i niezbędne do tego przykłady.

Poprzez oglądanie filmów (do których linki podane są w innych rozdziałach) angażujemy więcej zmysłów niż podczas biernego przepisywania z tablicy, nauczyciel zatrzymuje je w dowolnej chwili i przystępuje do dyskusji z uczniami, nie podaje gotowych rozwiązań ale aktywizuje uczniów. Zwracajmy uwagę na precyzyjne wypowiedzi uczniów i poprawiamy.

Główne cele jakie chcemy osiągnąć to:

- a) nauczyć organizacji zajęć, gospodarowania przestrzenią, gdy do rozwiązania jest całe zadanie, często wymagające przemyślenia kolejnych etapów;
- b) umiejętność i potrzeba samodzielnego, refleksyjnego, logicznego, krytycznego i twórczego myślenia;
- c) umiejętność rozumienia podstawowych pojęć i działań matematycznych, uczeń samodzielnie korzysta z nich w różnych sytuacjach życiowych, wstępnej matematyzacji wraz z opisem tych czynności: słowami, obrazem, symbolem;
- d) umiejętność stawiania pytań, dostrzegania problemów, zbierania informacji potrzebnych do ich rozwiązania, planowania i organizacji działania, a także rozwiązywania problemów;
- e) umiejętność czytania prostych tekstów matematycznych, np. zadań tekstowych, łamigłówek i zagadek, symboli;



$f(x)$



- f) umiejętność obserwacji faktów, zjawisk przyrodniczych, społecznych i gospodarczych, wykonywania eksperymentów i doświadczeń, a także umiejętność formułowania wniosków i spostrzeżeń [Grońska i in., Kształcenie kompetencji kluczowych na matematyce i przedmiotach przyrodniczych].



$f(x)$



2. Pogadanka

Pogadanka to dialog nierównoprawnych stron:

- nauczyciela, który stawia pytania różnie rozbudowane i wie po co je zadaje,
- ucznia, który odpowiada i nie wie, do czego zmierza nauczyciel [Łoś, Reszka, 2009, s. 45].

Rodzaje:

- wstępna,
- przedstawiająca nowe wiadomości,
- utrwalająca,
- kontrolna.

Pozwala na stworzenie nowych struktur wiadomości pod wpływem nowego zadania łączącego to co znane i to co nowe w obrębie tego samego tematu, wiadomości te zostają następnie wykorzystane w nowych sytuacjach, do innych zadań, do nadania nowych znaczeń i uporządkowania doświadczeń, wszystkie te działania powinny składać się na uporządkowanie i utrwalenie wiedzy oraz kształtowanie postaw uczniów [ibidem, s. 45].

Pogadanka może:

- wypełnić całą lekcję – następuje konfrontacja zdobytych wiadomości z zamierzeniami nauczyciela odnośnie zasobu wiedzy, uporządkowania wiadomości, oddziaływań wychowawczych lub możliwości transformacji zdobytej wiedzy,
- być pogadanką wstępną służącą rozbudzeniu zainteresowań, ukierunkowaniu wiadomości, ukazaniu strony omawianego materiału [ibidem, s. 45]., tak jak w proponowanych scenariuszach lekcji.

Zalety i wady pogadanki:

- ustalenie tematu i celu lekcji,
- aktualizacja doświadczeń,



$f(x)$



- przypomnienie znanych wiadomości powiązanych z nowym tematem,
- poznanie zainteresowań uczniów,
- odkrywanie przez uczniów nowych treści,
- operowanie materiałem wcześniej opanowanym,
- utrwalanie materiału,
- sprawdzanie stopnia opanowania wiedzy,
- aktywizowanie uczniów,
- motywowanie uczniów,
- ożywienie lekcji,
- intensyfikacja kontaktu nauczyciela z uczniami,
- możliwość zastosowania w różnych fazach lekcji,
- zaangażowanie niewielu uczniów,
- możliwość oderwania od zasadniczego tematu,
- zbytne rozproszenie treści,
- przekroczenie czasu,
- rozbieżność pomiędzy myśleniem i wyobraźnią nauczyciela i uczniów
np.: niezrozumienie pytań stawianych przez nauczyciela [ibidem,
s. 46].



$f(x)$



3. Pozytywne relacje w zespole klasowym

Pamiętajmy, że zbudowanie pozytywnych relacji w zespole klasowym jest bardzo ważne w procesie kształcenia. Nasze mózgi są w naturalny sposób nastawione na dobre relacje i kontakty z innymi ludźmi. Wszystko bowiem, czego doświadczamy w relacjach z innymi ludźmi, mózg przetwarza w sygnały biologiczne, które wpływają na fizjologię i sprawność fizyczną ciała oraz determinują nasze zachowania [Bauer, 2015, s. 16-17]. Jeśli relacje międzyludzkie są dobre – tzn. rozumiem innych i jestem rozumiany – znacznie wzrasta efektywność nauczania oraz wewnętrzna motywacja, bez której nabywanie wiedzy przez człowieka nie byłoby możliwe [Sikorski, (red.), 2015, s. 49].

Celem pozytywnych relacji w zespole klasowym jest zwrócenie uwagi na rolę relacji między uczniami i nauczycielami, od których zależą nie tylko zainteresowania i zamiłowania uczniów do danego przedmiotu, ich wyniki i konkretne wiadomości, ale także to, jak będzie im się wiodło w życiu i jak rozwiną się jako ludzie [Musiał, 2016, s. 1]. Dobre relacje między nauczycielami i uczniami są tajemnicą sukcesu udanego nauczania, tylko gdy w relacjach panuje duch zachęty i współpracy, a ludzie wierzą w siebie i mogą rozwijać swoje potencjały, aktywowane zostają systemy motywacji, które odgrywają ogromną rolę w procesach uczenia się [ibidem].

Budowanie pozytywnych relacji w zespole klasowym możemy zacząć już od pierwszej lekcji, wystarczy kilka sekund na kontakt wzrokowy z uczniem i uśmiech. Gdy już znamy i pamiętamy imiona uczniów możemy przed wejściem do klasy (lub tuż po wejściu, gdyż to zazwyczaj nauczyciel wchodzi pierwszy) powitać uczniów po imieniu, w tej sytuacji każdy uczeń będzie musiał przejść przez drzwi klasy obok nauczyciela, więc warunki do przywitania się będą sprzyjały, jeśli jest to liczna klasa to powitajmy przynajmniej kilku uczniów po imieniu. Możemy też np. zagadnąć mijających nas uczniów. Prosty komunikat – „o nowa fryzura, ładnie Ci” czy „moja córka ma takie same buty, wygodne są?”

 $f(x)$ 

– już buduje relację między uczniem a nauczycielem [Mieloch-Plumińska, 2018]. Nie wiemy, z jakiego domu przychodzi nasz uczeń, nie wiemy, czy zjadł śniadanie, czy mama na niego nakrzyrzała, czy nie było awantury w nocy ..., może się okazać, że uśmiech czy kilka słów, które wyrażą zainteresowanie, zbuduje pozytywny dzień obdarowanego uwagą nauczyciela ucznia, podobnie można wykorzystać zakończenie lekcji do tego, aby porozmawiać z uczniami; którymi [ibidem]? Z wszystkimi, z którym się da, być może najlepiej na początek wybrać tego, który nam przeszkadza w prowadzeniu zajęć, nawiązanie relacji, pokazanie, że zależy nam na nim, może pozytywnie wpłynąć na jego zachowanie, uczeń, jak każdy człowiek, chce być zauważony, zwłaszcza wtedy, gdy coś złego dzieje się w jego życiu, jeśli uczymy dany zespół rok czy dwa, to nawet przy niewielkiej liczbie godzin w tygodniu stosunkowo łatwo można zauważyć, że ktoś jest markotny, wyłączony i jest myślami gdzie indziej [ibidem]. Można wtedy poprosić ucznia, żeby pomógł nam odnieść zeszyty, mapę itd., a po drodze powiedzieć „wydaje mi się, czy jakiś dziś smutny jesteś?”. Być może te słowa sprawią, że uczeń zacznie z nami rozmawiać, jeśli jednak nie podejmie tematu, dostaje jasny sygnał: jestem dla kogoś ważny, bo widzi, że jest mi trudno, takie „zauważenie” ucznia przez nauczyciela buduje relację, budując dobre kontakty z uczniami, należy koniecznie zwracać uwagę na słowa, komunikaty i ton głosu, krytykanctwo, wytykanie błędów w sposób, który rani, używanie ośmieszających zdrobnień lub przezwisk nie buduje relacji [ibidem].

Mobilizujemy ucznia do pracy pochwałami, uważajmy przy tym aby była ona adekwatna do tego konkretnego ucznia. Jeśli do pochwał stosujemy takie słowa jak „dobrze”, „świetnie”, to uczniowie nie wiedzą co tak naprawdę było dobrze a co było świetnie. Jeśli słowa te dotyczą wszystkich to oznacza to, że wszyscy traktowani są tak samo, nie chwalmy też zbyt często bo wtedy pochwały nie pełnią swojej funkcji.

Uczeń, który usłyszy od swojego nauczyciela „podoba mi się, jak łączysz fakty” czy „bardzo dobrze uzasadniłeś swoje zdanie” lub „masz wiedzę, chylę

 $f(x)$ 

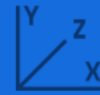
czoła!”, „posłuchajcie, jak Tomek doszedł do dobrego rozwiązania – ten to ma tok myślenia!”, po pierwsze wie, co robi dobrze, a po drugie słyszy mobilizujące słowa [ibidem]. Którego nauczyciela będzie bardziej lubił, za którym podąży: tego, który go rani słowami (komunikaty: „to nawet pięcioletnie dziecko wie”, „zmiń szkołę”, „jesteś moim największym błędem”, „Twoja matka codziennie przez Ciebie pewnie płacze” itd.) czy tego, który widząc w uczniu człowieka, wspiera go słowem [ibidem]?

Trudno nawiązać pozytywne relacje z klasą, jeśli nie bierze się pod uwagę emocji swoich uczniów w banalnych (dla dorosłego) sytuacjach, wystarczy przynieść na lekcję poprawione sprawdziany i nie oddając ich uczniom do ręki, przez kilka minut mówić o tym, jak fatalnie wypadły i jakie nieuki je pisały. Pojedynczy uczeń nie wie, czy komunikat dotyczy jego sprawdzianu czy może kolegi, nie widzi go, nie może się do niego odnieść, więc się denerwuje [ibidem].

Ufajmy swoim uczniom, jeśli uczeń był chory i jest pierwszy dzień w szkole a kolega od którego pożyczył zeszyt nie powiedział mu o pracy domowej to nie oznacza, że jest leniwy i kłamie.

Uczniowie bardzo cenią nauczycieli, którzy potrafią przyznać się do niewiedzy czy błędu, jeśli zrobimy błąd ortograficzny na tablicy, pomylimy się w obliczeniach, lepiej jest powiedzieć „trzy plusy za aktywność dla Asi, bo nie dosyć, że potrafi wyłapać błąd, to jeszcze w kulturalny sposób zwrócić na niego uwagę” niż dowodzić, że to uczeń nie ma racji [ibidem].

Dobre relacje z nauczycielem dają uczniowi poczucie bezpieczeństwa, gdyż nie boi się przyznać do niewiedzy, bo wie, że nie zostanie skrytykowany. Zapewne dużo razy zdarzało się tak, że nauczyciel pytał klasę – „rozumiecie?”, a wszyscy kiwali głowami, choć woleliby nimi potrząsać. Poczucie bezpieczeństwa da uczniom wprowadzenie zasady „pas”, oznacza ona, że raz w ciągu lekcji uczeń bez konsekwencji może nie odpowiedzieć na pytanie, nie podejść do rozwiązania zadania itd. [ibidem]. Nauczyciel podaje przyczyny wprowadzenia zasady poprzez komunikat: „Wiem, że nie jesteście robotami. Każdy z nas czasami bywa

 $f(x)$ 

rozkojarzony, czasami ma zły dzień, dlatego raz w ciągu mojej lekcji możecie powiedzieć „pas”, dla mnie jest to czytelny sygnał, że w tej chwili nie możecie brać udziału w zadaniu”, dzięki temu tworzy dla swoich uczniów pewnego rodzaju poduszkę bezpieczeństwa, nie muszą się bać chwilowego rozkojarzenia, a jednocześnie znają wyznaczoną przez pedagoga granicę [ibidem].

 $f(x)$ 

4. Innowacyjne pomoce dydaktyczne

Pokazując im, że matematyka nie jest przykrym obowiązkiem i że może być naprawdę wszechstronna i ekscytująca, wzbudzimy ich zainteresowanie i pewność siebie. Oczywiście każdy uczeń jest inny i powinien być traktowany indywidualnie. Ważne jest, aby zwrócić uwagę na to, w jaki sposób uczeń przyswaja informacje, w jaki sposób rozumie wyzwania i podchodzi do nich. Może pomocne okażą się odpowiednio dobrane zadania – zabawy, może zadania, które angażują wiele zmysłów jednocześnie (integracja sensoryczna), może zadania z wykorzystaniem programów komputerowych i różnego rodzaju nowatorskich wizualizacji. To wszystko sprawi, że nauka matematyki będzie przyjemniejsza.

Innowacyjni nauczycieli, to taki, który uatrakcyjni lekcje matematyki korzystając z programów komputerowych, czy tablic multimedialnych będzie to bardzo pożądane szczególnie w geometrii zarówno płaskiej jak i przestrzennej. Uczniowie są bardzo otwarci na różne nowinki techniczne i można oczekiwać, że wizualizacje różnych problemów geometrycznych a także tych z wykorzystaniem funkcji byłyby dla nich ciekawym urozmaiceniem lekcji matematyki [Falkiewicz, Maj, 2018, s. 89]. Owocem takich działań byłyby lepsze efekty przyswajania wiedzy przez uczniów, można by wtedy pomyśleć o tym, aby choć jedna godzina matematyki w tygodniu była przeprowadzana w laboratorium komputerowym, w ten sposób można byłoby pokazać uczniom związek matematyki z informatyką [ibidem]. Mogliby oni poszerzać swoją wiedzę przez zabawę, poznawanie programów komputerowych służących obliczeniom matematycznym i wreszcie pobudzać własną kreatywność, umiejętność logicznego myślenia i wyobraźnię przestrzenną, dlatego warto już od najmłodszych lat pokazywać dzieciom, że matematyka jest wszędzie i jej nauczanie nie musi polegać jedynie na rozwiązywaniu zadań przy tablicy [ibidem].

 $f(x)$ 

Możemy zatem zaproponować uczniom nowatorską lekcję matematyki z wykorzystaniem programowania np. w GeoGebra. Tym bardziej, że wśród uczniów widoczne jest duże zainteresowanie komputerami, na których mogliby samodzielnie tworzyć różne wykresy funkcji, eksperymenty, konsekwencją czego będzie zdobyta i znacznie bardziej utrwalona wiedza. Dzięki takim nieszablonowym lekcjom uczniowie lepiej zapamiętują nowopoznane pojęcia i stosują je w praktyce, mogą oni również rozwijać swoje pasje i zainteresowania z jednoczesnym kształtowaniem licznych umiejętności przedmiotowych. Program Geogebra jest darmowy i bardzo prosty w obsłudze, każdy uczeń może go sobie zainstalować na własnym domowym komputerze. GeoGebra jest narzędziem pozwalającym uczniowi: „zobaczyć” (np. różnego rodzaju wykresy funkcji), lepiej rozumieć zależności między wykresem a jego przesunięciem o wektor. Innowacyjne lekcje z matematycznego programowania (obsługa programu GeoGebra), prowadzenie obserwacji dynamicznych oraz ćwiczeń dostępnych na stronie [GeoGebry](#), tworzenie min. konstrukcji dynamicznych sprawiają, że uczniowie mają możliwość eksperymentowania z funkcjami i ich wykresami, sami odkrywają różne zależności, a także zdobywają też umiejętność konstruowania obiektów, pogłębiają umiejętność wykonywania wykresów funkcji. Na stronie są gotowe aplikacje i prezentacje przygotowane dla uczniów w każdym wieku, które nauczyciel może pokazać nawet bez instalowania programu i bez uprzedniego zaznajomienia się z tym programem. Dla zainteresowanych tym programem polecić można podręczniki, które umieszczone są na stronach:

- a) [Podręcznik "Wprowadzenie do GeoGebry"](#), wersja 4.2.,
- b) [Podręcznik "Matematyka"](#) – Pawlak R.J., Walczak Z., Matematyka.

Materiały metodyczne, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Korzystając z programu uczeń w innowacyjny sposób bardzo kreatywnie stymuluje wyobraźnię a także ćwiczy pamięć i logiczne myślenie matematyczne, rozwija strategię swojego działania nie tylko poprzez rozwiązywanie zadań

 $f(x)$ 

ale też poprzez obsługę tego programu, uczeń musi się zastanowić gdzie i co wpisać, co sprzyja rozwojowi koordynacji wzrokowo-ruchowej. Efekty jakie możemy osiągnąć dzięki lekcji z programem GeoGebra:

- a) podniesienie atrakcyjności lekcji,
- b) aktywizacja pracy ucznia na lekcji – realizacja założenia "learning by doing",
- c) wygoda, m.in. łatwy i stały dostęp ucznia do materiałów (tak w szkole, jak i z domu), możliwość szybkiego uzupełnienia i wymiany wiadomości z lekcji, dzięki magazynowaniu materiałów na dysku szkolnym,
- d) duży stopień uporządkowania informacji, łatwość prowadzenia notatek na lekcji.

W ramach praktyk proponujemy lekcję odczytywania własności funkcji z wykresów, do której scenariusz napisał Adam Makowski. Scenariusz znajduje się na [stronie www 1](#). Cel ogólny takiej lekcji to: kształtowanie umiejętności wykorzystania i tworzenia informacji.

Cele operacyjne jakie wskazuje autor scenariusza to: uczeń:

- odczytuje z wykresu funkcji dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, największą i najmniejszą wartości funkcji,
- wyszukuje programy komputerowe do rysowania wykresów funkcji i z nich korzysta,
- prezentuje wyniki na szerszym forum.

Środki dydaktyczne z których korzystamy podczas takiej lekcji to: pracownia komputerowa, rzutnik multimedialny. Komentarz metodyczny autora jest następujący: „Jednym z ważnych elementów tej lekcji jest wskazanie uczniom dobrodziejstwa Internetu i technologii komputerowej. Ponieważ różne pary mogą pracować w różnym tempie, warto mieć kilka przykładów w rezerwie. Uczniowie, którzy szybko uporają się ze swoim zadaniem, mogą otrzymać kolejny wzór funkcji. W przypadku utrudnionego dostępu do pracowni lekcję można przeprowadzić z wykorzystaniem rzutnika multimedialnego, omawiając wykresy

 $f(x)$ 

kolejnych funkcji na forum klasy. W przypadku uczniów ze specjalnymi potrzebami ważna jest asysta ze strony nauczyciela lub drugiego ucznia. Ważne, aby zaangażować takiego ucznia w proces lekcji. Może odczytać trzy wybrane własności, a druga osoba z pary pozostałe. Uczeń ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi powinien skupić się na wygodnych dla niego własnościach i będzie to wyglądało naturalnie.”

Aby sprawdzić wiadomości możemy wykonać zadanie interaktywne dotyczące odczytywania własności funkcji z wykresu na [stronie www 2](#). Podczas omawianej lekcji możemy też użyć programu GeoGebra aby rysować wykresy funkcji o zadanym wzorze lub Microsoft Office Excel w którym wystarczy wprowadzić dane aby zobaczyć jak wygląda funkcja i omówić jej własności. Potrzebujemy w tym celu pracowni komputerowej lub rzutnika multimedialnego (omawiamy wtedy wykresy kolejnych funkcji na forum klasy lub konkretne przykłady omawiają chętni uczniowie, możemy też pracować wspólnie). Jeśli lekcja odbędzie się w sali komputerowej (do czego zachęcamy najbardziej) i organizujemy pracę w parach to pamiętajmy, że różne pary mogą pracować w różnym tempie, trzeba zatem przygotować kilka zadań dla tych grup, które będą pracowały szybciej. W przypadku uczniów ze specjalnymi potrzebami ważne jest wsparcie nauczyciela i jego szczególna uwaga lub wsparcie ze strony ucznia – asystenta czyli ucznia, który już opanował omawiany temat w znacznym stopniu. Ważne, aby zaangażować takiego ucznia w proces lekcji, uczeń nie musi wykonać wszystkich poleceń, może wykonać wybrane polecenia a ciąg dalszy zadania wykona inny uczeń w tej grupie, czyli zastosujemy podział obowiązków, który jest naturalny podczas wykonywania pracy grupowej.

Po pracy ucznia na komputerowo wspomaganą lekcję matematyki powinien pozostać ślad. Może to być plik zachowany w odpowiednim katalogu z nazwą np. „klasa_data_zajęć”, wydruk, notatka w zeszytach. Obowiązek sporządzenia dokumentu podczas takiej lekcji ma dwójakie znaczenie: edukacyjne



$f(x)$



(przeciwdziała zapomnieniu treści lekcji) i psychologiczno-dyscyplinujące, gdyż często uczniowie traktują lekcję z komputerem jako lekcję „ulgową”.



$f(x)$



Kompetencje, które rozwijamy podczas takiej lekcji to:

- kreatywne rozwiązywanie problemów,
- sprawne posługiwanie się nowoczesnymi technologiami,
- rozwijanie kompetencji językowych, komunikacyjnych,
- umiejętności wyszukiwania, porządkowania i wykorzystywania informacji z różnych źródeł,
- kształtowanie umiejętności logicznego myślenia i wyciągania wniosków,
- rozwijanie sprawności poprzez samodzielne wykonywanie zadań,
- umiejętność pracy w grupie.

 $f(x)$ 

5. Uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi

Aby wspomagać uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi proponujemy skorzystać z poradni psychologiczno-pedagogicznej, która może wesprzeć przy planowaniu pracy uczniów z takimi potrzebami, tak, by stali się oni aktywnymi uczestnikami procesu uczenia się.

Ważne jest aby metody i techniki pracy, które uwzględniają indywidualne potrzeby i możliwości uczniów, zapewniały wspólne kształcenie wszystkim, ze szczególnym uwzględnieniem uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Indywidualizowany proces nauczania - uczenia się, to dostrzeganie indywidualnych różnic pomiędzy poszczególnymi uczniami w zakresie umiejętności, zdolności, potrzeb i zainteresowań, a następnie tworzenie im warunków do wszechstronnego rozwoju dokonującego się w procesie nauczania – uczenia się poprzez [Okoń, 1996, s. 191]:

- akwizycję wiedzy (pośrednią i bezpośrednią, formalną i nieformalną), odkrywanie i dociekanie, przeżywanie i działanie,
- różnicowanie metod, technik nauczania, modeli interakcyjnych i tempa pracy stosownie do potrzeb, zainteresowań oraz możliwości umysłowych poszczególnych uczniów, w tym również uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi (różnicowanie zadań, pomoce multimedialne o różnym poziomie zaawansowania),
- indywidualizowanie procesu nauczania – uczenia się poprzez wdrażanie do rozpoznawania własnych stylów uczenia się.

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby uczniów, szkoła powinna zorganizować zajęcia zwiększające szanse edukacyjne dla uczniów mających trudności w nauce matematyki oraz dla tych, którzy mają szczególne zdolności matematyczne zgodnie z wytycznymi MEN w zakresie edukacji włączającej, program nauczania jest w pełni zgodny z podstawą programową oraz uwzględnia możliwość indywidualizacji pracy z uczniem [Szumera, 2019, s. 45].

 $f(x)$ 

Uczniowie z trudnościami w uczeniu się matematyki są nieodłączną częścią procesu dydaktycznego w szkole, często są to osoby, które dotarły do kolejnego etapu edukacyjnego z zaległościami, i takie, które mają zakorzeniony lęk przed matematyką i niechęć do tego przedmiotu, w szkole ponadpodstawowej, w nowym środowisku ucznia, należy zwiększyć motywację do nauki, wdrożyć do systematycznej pracy, wzmocnić samoocenę oraz rozwinąć zainteresowanie przedmiotem, aby skierować tych uczniów na właściwe tory [ibidem, s. 45]. Duża część wymaga jednak specjalnego podejścia w procesie dydaktycznym udokumentowanego opiniami i orzeczeniami z poradni psychologiczno-pedagogicznej, a także uwarunkowanego różnorodnymi ograniczeniami i zaburzeniami rozwojowymi [ibidem, s. 45]. Problemy z matematyką mają różne podłoże, najczęściej są to:

- a) ograniczona sprawność w przypadku wykonywania operacji na liczbach,
- b) ograniczona zdolność do posługiwania się reprezentacjami obrazowymi i pojęciami,
- c) ograniczona zdolność do zapamiętywania i stosowania prostych algorytmów,
- d) ograniczona zdolność dedukcji, uogólniania, analizowania i wyciągania wniosków,
- e) niski poziom wyobraźni przestrzennej,
- f) niski poziom koordynacji percepcyjno-motorycznej,
- g) niski poziom motywacji, koncentracji i dojrzałości emocjonalnej w warunkach dużego wysiłku intelektualnego [Płońska, 2018, s. 9].

Środkiem zaradczym wyżej wymienionych problemów jest właśnie wspomaganie multimedialne nauczania matematyki oraz odpowiednio skonstruowane karty pracy, dostosowane do potrzeb ucznia o specyficznych potrzebach edukacyjnych (SPE) [Szumera, 2019, s. 46].

Przykładowe karty pracy przedstawione są w pozycji Anny Płońskiej „Jak pokonać trudności z matematyką w szkole ponadgimnazjalnej”

 $f(x)$ 

oraz „Jak pokonać trudności z funkcjami na lekcjach matematyki w szkole ponadpodstawowej” [ibidem, s. 46]. Przykłady ćwiczeń i zadań z matematyki w postaci apletów GeoGebry dla uczniów ze SPE zawarte są w pracy Agaty Matuszczak „Uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi”. W przypadku uczniów zdolnych, można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże zgodnie z wytycznymi podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego „wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki” (Dz.U. z dnia 24 lutego 2017 r., poz. 1591) [ibidem, s. 46]. „W obszarze metodyki pracy z uczniem należy dostosować sposoby nauczania do jego możliwości i potrzeb, uwzględniając zróżnicowane tempo operacji umysłowych, wahania nastroju oraz poziomu aktywności umysłowej związane z poziomem funkcjonowania. Warto jest proponować nauczanie metodą projektów, które dają uczniowi możliwość regulowania swojego poziomu aktywności” [Zaremba, 2014, s. 74].

Jeśli pracujemy z uczniem zdolnym to proponujemy przeczytać pozycję pt. [„Jak pracować z uczniem zdolnym?”](#), poradnik nauczyciela matematyki praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, który przedstawia zagadnienia istotne dla nauczania matematyki na II, III i IV etapie edukacyjnym i jest skierowany do nauczycieli uczniów uzdolnionych matematycznie.

 $f(x)$ 

6. Wektory

Lekcję o wektorach proponujemy zacząć od filmu pt. „[Graficzne dodawanie i odejmowanie wektorów](#)”, następnie pokażemy pewne praktyczne zastosowanie tych wektorów w filmie pt. „[Wektory w 2 wymiarach, graficzne dodawanie wektorów](#)”. Przejdziemy teraz do przykładów pokazujących działania na wektorach, proponujemy więc obejrzeć film pt. „[Przykład działań na wektorach](#)” a następnie „[Wyznaczanie długości wektora ze znajomości współrzędnych jego początku i końca](#)” oraz „[Rozpoznawanie wektorów](#)”. Scenariusz lekcji podsumowujący wiadomości o wektorach, który opracował Paweł Słaby znajduje się na [stronie www 3](#). Cele lekcji, które podaje autor to: uczeń potrafi:

- podać współrzędne wektora,
- zdefiniować, kiedy dwa wektory są równe,
- zidentyfikować wektor przeciwny do danego,
- uzasadnić, że dwa wektory są równoległe,
- zaznaczyć wektor o podanych współrzędnych,
- obliczyć długość wektora,
- wyznaczyć środek symetrii figury,
- wykonać działania na wektorach,
- zaplanować pracę w grupie,
- udowodnić własności figur na podstawie wektorów.

 $f(x)$ 

7. Przesunięcia wykresów funkcji i ich symetria względem osi OX i OY

Aby opanować umiejętność przekształcania różnych wykresów funkcji proponuję obejrzeć następujące filmy pt. „[Rysowanie wykresu funkcji przesuniętej](#)”, „[Odbijanie i skalowanie wykresu funkcji](#)”, „[Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych](#)” oraz „[Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych \(przykład 2\)](#)”. Jako pracę samodzielną polecam [quiz](#) dotyczący przesunięcia wykresu funkcji, więcej możemy znaleźć na [stronie www 4](#). Dla uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi proponujemy multimedialną lekcję matematyki, gdzie uczniowie z wadą wzroku doskonale zobaczą przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi OY: [wersja 1](#) lub [wersja 2](#) oraz wzdłuż osi OX [przykład 1](#), [przykład 2](#) lub [przykład 3](#). Obserwowanie przesunięcia wykresu funkcji o wektor $[a,b]$ znajdziemy na [stronie www 5](#). Scenariusz autorstwa Adama Makowskiego lekcji o przesuwanie wykresów funkcji znajdziemy na [stronie www 6](#). Autor scenariusza wskazuje następujące cele:

- cel ogólny – kształcenie umiejętności wykorzystania i tworzenia informacji.
- Cele operacyjne. Uczeń:
 - rysuje wykresy $y = f(x-p)$, mając dany wykres funkcji $f(x)$,
 - rysuje wykresy $y = f(x) + q$, mając dany wykres funkcji $f(x)$,
 - posługuje się technologią informatyczną,
 - wyszukuje programy komputerowe do rysowania wykresów funkcji i z nich korzysta.

Środki dydaktyczne jakie proponuje autor, to: pracownia komputerowa i rzutnik multimedialny. Komentarz metodyczny jaki wskazuje autor w tym scenariuszu jest następujący: „Szczególnie ważne na tej lekcji są dwa elementy. Pierwszy to umiejętność wyszukiwania w Internecie programów dydaktycznych, w tym przypadku do rysowania wykresów funkcji. Drugi to samodzielne dochodzenie do wiedzy, w tym przypadku samodzielne odgadnięcie zależności między

 $f(x)$ 

wykresem podstawowej funkcji a funkcją po przesunięciu. Działania w parach, po części wymuszone przez możliwości większości pracowni szkolnych, pozwalają włączyć się aktywnie w działania uczniom ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, ponieważ mogą oni cały czas liczyć na pomoc kolegi z pary. W przypadku utrudnionego dostępu do pracowni lekcję można przeprowadzić z wykorzystaniem rzutnika multimedialnego, prowadząc dyskusję lub burzę mózgów na forum klasy. Warto, aby operatorami pokazu byli uczniowie.”

Aby przypomnieć pojęcie symetrii możemy zacząć od filmów: „[Symetria osiowa w układzie współrzędnych](#)”, „[Symetria środkowa w układzie współrzędnych](#)”, „[Symetria osiowa odcinków](#)” a następnie proponujemy pokazać lub podać uczniom następujące linki do animacji, które stymulują wyobraźnię. Punkty symetryczne względem osi OY możemy zaobserwować na [animacji](#). Punkty symetryczne względem osi OX widzimy na [stronie www 7](#). Animację pokazującą punkty symetryczne względem osi układu współrzędnych wraz z opisem znajdziemy pod adresem [GeoGebra](#). Animację dotyczącą symetrii względem osi układu współrzędnych autorstwa Doroty Gały mamy na [stronie www 8](#). Bardzo interesującą animację autorstwa Anny Nawrot dotyczącą przekształcania wykresu funkcji wykładniczej, którą możemy odbijać symetrycznie względem osi OX, OY i przesuwać o dowolny wektor znajdziemy na [stronie www 9](#). Animację autorstwa Mirosława Butajło dotyczącą przekształcania wykresu funkcji kwadratowej, którą możemy odbijać symetrycznie względem osi OX, OY i przesuwać o dowolny wektor znajdziemy na [stronie www 10](#).

Lekcję dotyczącą przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych możemy też zaplanować w następujący sposób.

1) Cele edukacyjne takiej lekcji to:

- przypomnienie i usystematyzowanie wiadomości o rysowaniu wykresów funkcji,



$f(x)$



- poznanie zależności między punktami, które otrzymujemy poprzez symetrię względem osi układu,
 - poznanie zależności między funkcją a funkcją , której wykres uzyskujemy przez przesunięcie względem osi układu,
 - praktyczne zastosowanie poznanych zagadnień,
 - uczeń otrzymuje polecenia i zadania adekwatne do swoich możliwości (uczeń ze SPE),
 - wspieranie w swojej aktywności (uczniów ze SPE),
 - stworzenie warunków przynależności do społeczności klasowej (uczniowie ze SPE),
 - kształtowanie umiejętności precyzyjnego rysowania wykresów funkcji,
 - kształtowanie umiejętności logicznego myślenia i poprawnego wnioskowania,
 - doskonalenie samodzielności podczas wykonywania zadań,
 - dokonywanie samokrytyki i oceny pracy innych,
 - rozwijanie odpowiedzialności, sumienności i sprawiedliwości,
 - rozwój kompetencji cyfrowych,
 - umiejętność pracy w grupie.
- 2) Metody pracy:
- pogadanka,
 - rozmowa dydaktyczna,
 - rozmowa problemowa,
 - praca w grupie i indywidualna,
 - pokaz multimedialny, metoda eksponująca,
 - układanka.
- 3) Środki dydaktyczne:
- sala komputerowa i komputer z zainstalowanym programem GeoGebra lub Excel,
 - wykresy funkcji:

 $f(x)$ 

$$f(x) = x^2,$$

$$f(x) = |x|,$$

$$f(x) = \sqrt{x},$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

przygotowane przez uczniów np. w Excelu,

- karty pracy dla uczniów (zróżnicowane pod względem SPE),
- podręcznik i zbiór zadań,
- laptop z programem do tworzenia wykresów funkcji,
- projektor multimedialny.

4) Lekcja:

- sprawdzenie obecności,
- praca indywidualna lub praca w parach,
- nawiązanie do tematu lekcji poprzez prezentację (chętnych uczniów) wykresów funkcji wykonanych w domu - krótka informacja o podstawowych ich własnościach,
- ocena pracy domowej uczniów (pochwała, ocena, plus z aktywności, nauczyciel oceniający pracę ucznia z SPE stosuje obniżone kryteria),
- nauczyciel poleca uczniowi (lub uczniom w parach) wykonywanie wykresów funkcji $f(x-1)$ i $f(x+1)$ lub $f(x-2)$ i $f(x+2)$ lub $f(x-3)$ i $f(x+3)$ itd. (w zależności od ilości par uczniów lub liczby uczniów przy samodzielnych stanowiskach komputerowych) w tych samych plikach, w których zrobili pracę domową i na podstawie tych samych danych lub w zeszytach. Należy zwrócić uwagę aby uczniowie zapisali wzory wszystkich funkcji typu $f(x-1)$ i $f(x+1)$ dla wszystkich przykładów:
 - $f(x) = x^2$
 - $f(x) = |x|,$
 - $f(x) = \sqrt{x},$
 - $f(x) = \frac{1}{x}.$

 $f(x)$ 

Następnie prezentują prace na rzutniku multimedialnym (lub robi to nauczyciel) i wszyscy wspólnie wyciągają wnioski na podstawie sporządzonych wykresów, po czym zapisują je w zeszytach:

- Wniosek 1: Wykres funkcji $f(x+a)$, $a>0$ otrzymujemy, przesuając wykres funkcji $f(x)$ o a jednostek w lewo wzdłuż osi OX .
- Wniosek 2: Wykres funkcji $f(x-a)$, $a>0$ otrzymujemy, przesuując wykres funkcji $f(x)$ o a jednostek w prawo wzdłuż osi OX .
- Wniosek 3: Wykres funkcji $f(x)+b$, $b>0$ otrzymujemy, przesuując wykres funkcji $f(x)$ o b jednostek w górę wzdłuż osi OY .
- Wniosek 4: Wykres funkcji $f(x)-b$, $b>0$ otrzymujemy, przesuując wykres funkcji $f(x)$ o b jednostek w dół wzdłuż osi OY .

Po zapisaniu wniosków nauczyciel stawia problem: Jak będzie wyglądał wykres funkcji $f(x-1)+1$? Uczniowie wyciągają odpowiedni wniosek i zapisują go w zeszytach.

Wniosek 5: Wykres funkcji $f(x)$ możemy przesunąć jednocześnie o a , $a>0$ jednostek wzdłuż osi OX i b , $b>0$ jednostek wzdłuż osi OY . Kolejność nie jest istotna.

Zadanie do ćwiczeń samodzielnych na lekcji:

Sporządź wykresy funkcji:

- $f(x) = (x + 5)^2 - 3$,
- $f(x) = |x - 2| + 1$,
- $f(x) = \sqrt{x - 7} - 4$,
- $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$

Na zakończenie lekcji:

- podsumowanie, wspólne przypomnienie zapisanych wniosków,
- zadanie pracy domowej,
- ewentualnie ocena pracy uczniów podczas lekcji.

Praca z komputerem zachęca uczniów do samodzielnego eksperymentowania i sprawdzania swoich rozwiązań oraz przemyśleń. Nauczyciel może wskazać uczniom możliwość pobrania darmowego programu na ich domowe komputery oraz może zaprezentować jak można to wykonać. Wykorzystanie



$f(x)$



zaproprowanych metod i narzędzi jest aspektem ułatwiałcym przyswajanie wiedzy dla uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi.

 $f(x)$ 

8. Różne wykresy funkcji i ich zastosowania

Podczas lekcji o różnych wykresach funkcji proponujemy na początek przypomnienie wiadomości i znalezienie funkcji w życiu codziennym, zauważamy, że funkcję mają zastosowanie niemalże wszędzie:

- każdy uczeń w klasie ma przypisany swój numer w dzienniku,
- każdy człowiek na Ziemi ma swój PESEL,
- każda książka w bibliotece ma swój numer.

Na filmie przypomnimy sobie m.in. jakie przyporządkowanie jest funkcją a jakie przyporządkowanie nie jest funkcją, tego możemy się dowiedzieć z filmu „[Co to jest funkcja?](#)”. Z filmu pt. „[Różne sposoby przedstawiania funkcji](#)”, dowiemy się m.in. jak przedstawić funkcję w postaci grafu oraz jak przedstawić funkcję liczbową w postaci tabeli i wykresu, na ile sposobów można pokazać daną funkcję. Film pt. „[Zastosowanie funkcji w życiu codziennym - temperatura](#)” pokaże jak odczytywać wartości temperatury z wykresu, jak porównywać temperaturę mierzoną w różnych godzinach. Natomiast w filmie pt. „[Zastosowanie funkcji w życiu codziennym - prędkość, droga i czas](#)”, zobaczymy jak odczytywać wartości prędkości i odległości z wykresu, jak wyznaczyć drogę przebytą w danym czasie, jak wyznaczyć średnią prędkość w danym czasie. W filmie pt. „[Zastosowanie funkcji w życiu codziennym - gospodarka](#)” podane są przykłady odczytywania kursu walut z wykresu oraz obliczanie kwot potrzebnych do zapłacenia w kantorze.

Nauczyciel w każdym momencie może zatrzymać film i dopytać uczniów o dowolny fragment aby upewnić się, że wszystko jest zrozumiałe. Proponujemy aby nauczyciel zatrzymywał film przed rozwiązaniem zadania podanego w filmach aby każdy z uczniów mógł samodzielnie je rozwiązać lub razem z innymi uczniami. Warto też zastosować metodę „burza mózgów”. Dzięki transkrypcji w filmach uczniowie niedosłyszający będą w pełni korzystać z takich lekcji. Przejrzyste rysunki, wizualizacje i animacje stosowane podczas oglądania filmów sprawiają, że uczniowie nawet z ubogą wyobraźnią

 $f(x)$ 

przestrzenną będą mogli zrozumieć i zobaczyć różne wykorzystanie funkcji w życiu codziennym. Filmy mogą być również odtwarzane przez uczniów w domach aby powtórzyć i utrwalić nowo poznane pojęcia i wzory.

Każdy nauczyciel powinien najpierw porozmawiać z uczniami o zadaniach a później rozwiązywać na tablicy, pamiętajmy przy tym o komentowaniu tego co piszemy. Jeśli to możliwe to pokażmy, różne metody rozwiązań, pokażmy jak sprawdzić czy rozwiązanie jest poprawne. Bardzo ważna jest współpraca z rodzicami, którzy powinni ucznia motywować do systematycznej pracy, nauczyciel powinien skupić się raczej na pochwałach (jeśli tylko jest taka możliwość).

Aby pokazać zastosowania funkcji proponujemy zacząć od filmu „[Funkcje liniowe i nieliniowe - przykład 2](#)”. Przykłady zastosowania funkcji możemy również znaleźć na [stronie www 11](#). Scenariusz, którego autorem jest Adam Makowski do lekcji „Gdzie mieszkają funkcje” znajdziemy na [stronie www 12](#). Wskazane w scenariuszu cele są następujące:

- 1) cel ogólny: umiejętność interpretowania i operowania informacjami.
- 2) Cele operacyjne. Uczeń:
 - odczytuje dane przedstawione w postaci wykresów i tabel,
 - przedstawia w postaci wykresu zależności podane w tabeli,
 - dobiera skalę na osiach układu współrzędnych,
 - współpracuje w grupie,
 - prezentuje dane przed większą grupą.

Autor zwraca uwagę, że nauczyciel powinien cały czas monitorować aktywność i zaangażowanie uczniów, aby w przyszłości wyeliminować te elementy scenariusza, które cieszą się najmniejszym zainteresowaniem, o ile planowane do realizacji cele nie zostaną uszczuplone, ponadto należy przeanalizować po lekcji adekwatność przeznaczonego czasu na poszczególne aktywności i etapy lekcji, aby w przyszłości zoptymalizować ten element.

Więcej interesujących scenariuszy znajduje się na [stronie zpe.gov.pl](#).

 $f(x)$ 

PODSUMOWANIE

Publikacja i propozycje w niej zawarte są uniwersalne i odpowiednie do nauki uczniów na każdym poziomie rozwoju. Praca ta jest przejrzysta i czytelna co czyni ją niezwykle wszechstronną. Dzięki systematycznym ćwiczeniom, które rozwijają myślenie matematyczne i naukowe, matematyce multimedialnej, która wykorzystuje nowoczesne metody dydaktyczne połączone z wykonywaniem przykładowych zadań podanym w tej publikacji uczeń udoskonali swoje umiejętności i wykorzysta je w innych sytuacjach z życia codziennego lub w dorosłości. Takie innowacyjne ćwiczenia (podane zostały do nich również linki), rozwijają spostrzegawczość, koncentrację, oraz koordynację wzrokowo ruchową. Zróżnicowane zadania są kierowane do uczniów o różnych sprawnościach intelektualnych, ruchowych i wzrokowych. Podane linki bogate są w komentarze, przykłady, rysunki i obrazki interaktywne, dzięki nim uczeń polubi i zrozumie przekształcanie wykresów funkcji. Zastosowane ćwiczenia z pomocami dydaktycznymi sprawią, że każdy uczeń widział i mógł zobaczyć, że funkcje występują w życiu codziennym.

W publikacji możemy znaleźć gotowe scenariusze i konspekty lekcji co ułatwi pracę nauczycielom, podane zostały w nich koncepcje dydaktyczne wraz z propozycjami rozwiązań dydaktycznych. Jest wiele innowacyjnych rozwiązań dydaktycznych w tym gry dydaktyczne wraz z dokładnym opisem ich przebiegu. Innowacyjne są również proponowane zadania do wykorzystania podczas lekcji lub jako praca domowa. W całej publikacji jest też wiele odniesień do podstawy programowej.

 $f(x)$ 

BIBLIOGRAFIA

1. Bauer, J., 2015. *Co z tą szkołą? Siedem perspektyw dla uczniów, nauczycieli i rodziców*. Słupsk: Dobra Literatura.
2. Denis, A., 2019. *Pojęcie funkcji i funkcja liniowa. Jak zdać maturę z matematyki? Kurs video. Poziom podstawowy*. Videopoint.
3. Falkiewicz, E., Maj, M., 2018. *Technologie informacyjne w nauczaniu geometrii w szkole podstawowej*. Dydaktyka Informatyki 13(2018). Rzeszów.
4. Falkowska, A., 2002. *Psychologia, t. 2, J. Strelau (red.)*. Gdańsk: GWP.
5. Gładyszewska-Cylulko, J., 2011. *Arteterapia w pracy pedagoga: teoretyczne i praktyczne podstawy terapii przez sztukę*. Kraków: Impuls.
6. Gruszczyk-Kolczyńska, E., 2018. *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze*. Dostępny w: <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf> [dostęp 16.07.2021].
7. Gruszczyk-Kolczyńska, E., 1992. *Dzieci ze specjalnymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-wyrównawcze*. Warszawa: WSiP.
8. Koomar, J. i in., 2014. *Integracja sensoryczna: odpowiedzi na pytania zadawane przez nauczycieli: formularze, listy kontrolnej praktyczne narzędzia dla nauczycieli i rodziców*. Gdańsk: Harmonia Universalis.
9. Kozulin, A., 1990. *Vygotsky 's psychology. A biography of ideas, Harvester-Wheatsheaf*. New York.
10. Kułakowska, Z., Borkowska, M., Zychowicz, B., 2013. *Terapia psychomotoryczna dzieci metodą Procus i Block*. Warszawa: Wydawnictwo Lekarskie PZWL.
11. Kwiecień, D., 2016. *Efektywne metody nauczania matematyki dla uczniów gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych z wykorzystaniem TIK*. Warszawa: ORE.



$f(x)$



12. Łoś, E., Reszka, A., 2009. *Metody nauczania stosowane w kształtowaniu kompetencji kluczowych, Matematyka*. Lublin: Wydawnictwo Naukowe Wyższej Szkoły Ekonomii i Innowacji.
13. Makiewicz, M., 2018. *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej)*. Dostępny w:
<https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf> [dostęp 16.07.2021].
14. Musiał, E., 2016. *Relacje uczeń – nauczyciel kluczem do udanego nauczania*, Rzeszów.
15. Okoń, W., 1996. *Wprowadzenia do dydaktyki ogólnej*. Warszawa: Wyd. „Żak”.
16. Płońska, A., 2018. *Jak pokonać trudności z funkcjami na lekcjach matematyki w szkole ponadpodstawowej*. Opole: Wyd. Nowik.
17. Pobiega, E., Skiba, R., Winkowska-Nowak, K., 2014. *Matematyka z GeoGebra*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie SEDNO.
18. Poleszak, W., Porzak, R., Kata, G., Kopik, A., 2014. *Diagnoza i wspomaganie w rozwoju dzieci uzdolnionych. Test Uzdolnień Wielorakich i materiały dydaktyczne*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
19. Rybak, A., 2016. *Multimedialne wspomaganie kształcenia matematycznego*. Opole: Wyd. NOWIK.
20. Sajka, M., 2019. *Pojęcie funkcji. Wiedza przedmiotowa nauczyciela matematyki. Seria: Prace monograficzne*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego.
21. Sierpińska, A., 1996. *Trzy podejścia do „problemu komunikacji” w nauczaniu matematyki*. ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 18(1996).
22. Sikorski, W., (red.) 2015. *Neuroedukacja. Jak wykorzystać potencjał mózgu w procesie uczenia się*. Słupsk: Dobra Literatura.



$f(x)$



23. Skura, M., Lisicki, M., 2014. *Myślenie matematyczne t. 1*. Warszawa: Wyd. Dr Josef Raabe Spółka Wydawnicza sp. Zoo.
24. Szumera, A., 2019. *Multimedialnie na matematyce*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
25. Wygotski, L. S., 1989. *Myślenie i mowa*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

 $f(x)$ 

NETOGRAFIA

1. Grońska, M., Kłoczko, E., Konewko, M., Lenkiewicz, A., Łepkowska, M., Mikołajczyk, D., Truchan, T. *Kształcenie kompetencji kluczowych na matematyce i przedmiotach przyrodniczych* [online]. Dostępny w: https://as.ceo.org.pl/sites/as.ceo.org.pl/files/ksztalcenie_kompetencji_kluczowych.pdf [Dostęp: 08.07.2021].
2. Mieloch-Plumińska, A., 2018, Nawiązywanie relacji z uczniem – jak uczynić pierwszy... drugi... siódmy krok [online]. Dostępny w: <https://portal.librus.pl/szkola/artykuly/nawiazywanie-relacji-z-ucniem-jak-uczynic-pierwszy-drugi-siodmy-krok> [Dostęp: 08.08.2021].
3. Platforma edukacyjna Ministerstwa Edukacji i Nauki. *Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne* [online]. Dostępny w: <https://zpe.gov.pl/a/pojecie-funkcji-zaleznosci-funkcyjne/DEq6CZ56o> [Dostęp: 08.07.2021].
4. Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla liceum, technikum i branżowej szkoły II stopnia <https://www.ore.edu.pl/2018/03/podstawa-programowa-ksztalcenia-ogolnego-dla-liceum-technikum-i-branzowej-szkoly-ii-stopnia/> [Dostęp: 08.07.2021].